

ریاضیات عمومی

درسنامه‌ی تشریحی

گردآورندگان ✍

سید امجد هاشمی

زهرا ملکی

سرشناسه :	هاشمی، سیدامجد، ۱۳۶۲ -
عنوان و نام پدیدآور :	درسنامه ریاضیات عمومی/ سیدامجد هاشمی، زهرا ملکی.
مشخصات نشر :	تهران: انتشارات علمی سنا، ۱۳۹۵.
مشخصات ظاهری :	۲۳۸ ص.: مصور، نمودار.
شابک :	۹۷۸-۶۰۰-۸۴۵۶-۱۲-۴
وضعیت فهرست نویسی :	فیفا
موضوع :	ریاضیات -- راهنمای آموزشی (عالی)
موضوع :	Mathematics -- Study and teaching (Higher)
موضوع :	ریاضیات -- مسائل، تمرین‌ها و غیره (عالی)
موضوع :	Mathematics -- Problems, exercises, etc. (Higher)
شناسه افزوده :	ملکی، زهرا، ۱۳۶۳ -
رده بندی کنگره :	QA۳۷/۳/ه۲د۴ ۱۳۹۵
رده بندی دیویی :	۵۱۰/۷۶
شماره کتابشناسی ملی :	۴۴۷۳۶۳۷



مؤسسه علمی انتشاراتی سنا

نام کتاب	ریاضیات عمومی
گردآورندگان	سید امجد هاشمی و زهرا ملکی
شابک	۹۷۸-۶۰۰-۸۴۵۶-۱۲-۴
سال چاپ	سوم- ۱۴۰۳
صفحه‌آرایی	انتشارات علمی سنا
طراح جلد	لیلا انصاری
پست الکترونیک	elmisana@gmail.com
فروش اینترنتی	sanabook.com
تیراژ	۱۰۰ نسخه
قیمت	برای مشاهده قیمت اسکن کنید. ➡



شما می‌توانید کتاب‌های نشر علمی سنا را علاوه بر کتابفروشی‌های سراسر کشور از نمایندگی‌های اختصاصی

مؤسسه واقع در کلیه استان‌ها تهیه نمایید.

آدرس نمایندگی‌ها در سایت sanapezeshki.com و یا انتهای کتاب درج شده است.

تلفن دفتر پخش: ۰۲۱-۶۶۵۷۴۳۴۵ داخلی ۳

دفتر مرکزی: تهران، میدان انقلاب، خیابان جمالزاده شمالی، خیابان فرصت شیرازی، پلاک ۷۲، طبقه همکف

تلفن: ۰۲۱۶۶۵۷۴۳۴۵-۶

فهرست:

فصل اول: توابع، حد و پیوستگی	1
فصل دوم: مشتق و کاربردهای آن	24
فصل سوم: انتگرال و کاربردهای آن	61
فصل چهارم: توابع متعالی	98
فصل پنجم: دنباله ها و سری ها	۱۲۸
فصل ششم: جبر خطی. هندسه تحلیلی	۱۵۲
فصل هفتم: توابع چند متغیره	۱۸۰
فصل هشتم: انتگرالهای دوگانه و سه گانه	۱۹۹
فصل نهم: انتگرالهای روی خم میدان های برداری	۲۱۲
فصل دهم: اعداد مختلط	۲۲۴



فصل اول:

توابع، حد و پیوستگی



فصل اول : توابع، حد، پیوستگی

توابع ابزار اصلی توصیف دنیای واقعی به زبان ریاضی هستند. در این بخش مفهوم تابع را مرور کرده و برخی تعاریف که برای بررسی توابع به آن‌ها نیاز داریم تعریف می‌کنیم.

تعریف تابع: هر تابع را می‌توان از سه زاویه مشاهده کرد.

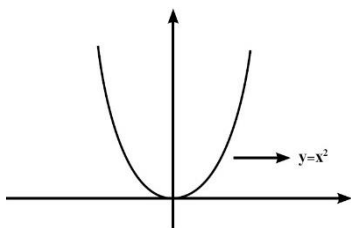
۱. ماشینی که برای ورودی x خروجی y را نتیجه می‌دهد، در این صورت ماشین را با f و خروجی ماشین را با $f(x)$ (حاصل عمل ماشین روی ورودی x) مشخص می‌کنیم.

$$x \rightarrow \boxed{\text{ماشین } f} \rightarrow f(x)$$

۲. قانونی که چگونگی تعیین y را از روی x بیان می‌کند. این قانون را به صورت $(y = f(x))$ مشخص می‌کنیم و آن را ضابطه تابع می‌نامیم. البته برخی توابع دارای ضابطه‌ی تعریف نیستند.

$$x \rightarrow \boxed{\text{ماشین } f} \rightarrow y = f(x)$$

۳. نموداری در صفحه xy که شامل تمام زوج مرتب‌هایی به صورت $(x, f(x))$ است که بیشتر در موارد ترسیم نمودار کاربرد دارد. مثلاً تابع $y = x^2$ را به صورت زوج مرتب‌های (x, x^2) نشان می‌دهیم که نمودار با مشخص کردن زوج مرتب‌هایی در صفحه نمایش مشخص می‌شود.



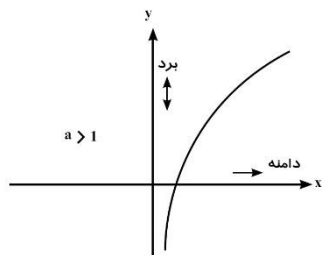
تعاریف اولیه :

دامنه تعریف تابع: مقداری که هر تابع می‌تواند بر روی محور x انتخاب کند به عبارتی تابع در آن نقاط تعریف شده باشد و با D_f نشان می‌دهند.

مثلاً در تابع $y = \ln x$ چون تابع $\ln x$ نمی‌تواند مقادیر صفر و منفی را قبول کند، پس دامنه در فاصله $x \in (0, +\infty)$ است.

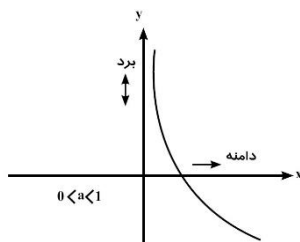


بُرد تابع: مقداری که هر تابع می‌تواند روی محور y ها انتخاب کند. از لحاظ ترسیمی بُرد تابع سایه نمودار بر محور y هاست و با R_f نشان می‌دهند.

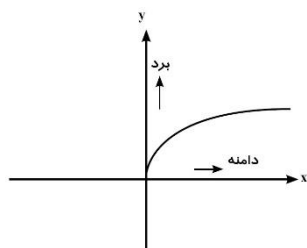


مثال ۱: دامنه و بُرد تابع $y = \log_a x$ را به دست آورید؟

با رسم شکل و مقداردهی به تابع



$$D_f = x \in (0, \infty) \quad , \quad R_f = y \in (-\infty, +\infty)$$



مثال ۲: دامنه و بُرد تابع $y = \sqrt{x}$ را بیابید؟

$$D_f = x \in [0, \infty) \quad , \quad R_f = y \in [0, \infty)$$

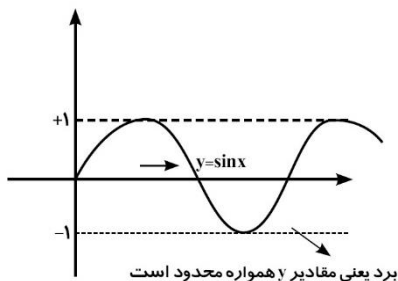
توابع کراندار: تابع f را در یک فاصله کران دار می‌گوئیم اگر در آن فاصله فاقد بی‌نهایت باشد. به عبارت

دیگر عددی چون M یافت شود که برای کلیه x های عضو دامنه داشته باشیم $|f(x)| < M$

مثلاً تابع $y = \sin x$ در هر فاصله کران دار است چون هر عدد $a \geq 1$ یک کران بالا و هر عدد $b \leq -1$

یک کران پائین برای این تابع نامیده می‌شود. توابع کران

دار هیچ وقت به بی‌نهایت نمی‌روند.



توابع متناوب: تابع f را در دامنه تعریف خود متناوب

می‌نامیم اگر عدد مثبتی چون k موجود باشد به طوری

مثال ۲۴: مقدار $\lim_{x \rightarrow \infty} \text{Arctan } x$ کدام است؟

- (۱) 0 (۲) 1 (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) ∞

با توجه به نمودار تابع $y = \arctan x$

مثال ۲۵: مقدار $\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b} \int_0^b e^{x^2-b^2} (x^2+1) dx$ برابر است با:

- (۱) $\frac{1}{e}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) 1 (۴) $+\infty$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b} \int_0^b e^{x^2-b^2} (x^2+1) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\int_0^b e^{x^2-b^2} (x^2+1) dx}{b e^{b^2}} \rightarrow 0$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{e^{b^2} (b^2+1)}{e^{b^2} + 2b^2 e^{b^2}} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b^2 e^{b^2}}{2b^2 e^{b^2}} = \frac{1}{2}$$

مثال ۲۶: به ازای چه مقدار تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} |x|[x] + a & x \leq -2 \\ |x| + [x] & x \geq -2 \end{cases}$ در $x = -2$ پیوسته

است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) 6

برای پیوستگی باید مقادیر حد راست و چپ با مقدار تابع در آن نقطه برابر باشد.

$$۱) \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (|x|[x] + a) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (-3[x] + a) = -6 + a$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (|x| + [x]) = \lim_{x \rightarrow -2^+} ([x] - 2) = 0$$

$$۱, ۲ \Rightarrow -6 + a = 0 \Rightarrow -6 = -a \Rightarrow a = 6$$



مشتق تابع معکوس:

فرض کنیم f در یک همسایگی نقطه a معکوس پذیر (یک به یک) باشد، و تابع f در نقطه $A \Big|_b^a \in f$ مشتق پذیر باشد آنگاه f^{-1} در نقطه $A \Big|_b^a$ مشتق پذیر است و

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

مثال: نشان دهید تابع $f(x) = \sqrt{3x+1}$ دارای معکوس می باشد و $(f^{-1})'(1)$ را بدست آورید.

حل: دامنه تابع f ، $\left[-\frac{1}{3}, \infty\right)$ می باشد، تابع f تابعی است پیوسته و چون $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} > 0$ پس f دارای معکوس f^{-1} می باشد. و چون $f(0)=1$ ، بنابراین

$$\begin{aligned} \sqrt{3x+1} = 1 &\xRightarrow{\text{به توان 2}} 3x+1 = 1 \\ &\quad 3x = 0 \\ &\quad x = 0 \\ (f^{-1})'(1) &= \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

مثال: نشان دهید تابع زیر دارای معکوس است و $(f^{-1})'(1)$ را پیدا کنید.

$$F(x) = 2x^2 + 8x + 7, \quad x \leq -2$$

تابع روی بازه تعریف شده $(-\infty, -2]$ پیوسته و مشتق پذیر است و چون $f'(x) = 4x+8$ دو دامنه $x \leq -2$ و $f'(x) < 0$

بنابراین تابع f روی این فاصله نزولی و دارای معکوس است.

$$2x^2 + 8x + 7 = 1 \rightarrow 2x^2 + 8x + 6 = 0 \quad (x+3)(x+1) = 0 \quad \begin{array}{l|l} -3 & \text{ق ق} \\ -1 & \text{ق ق غ} \end{array}$$

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(-3)} = \frac{1}{4(-3)+4} = \frac{-1}{4}$$

قاعده زنجیری: فرض کنیم $h = g \circ f$ ترکیب تابعهای مشتق پذیر $y = g(x)$ و $x = f(t)$ را نمایش دهد، آنگاه h تابع مشتق پذیری از t است که مشتق آن به ازای هر مقدار t برابر است با:

$$(g \circ f)'_t = g'_x \cdot f'_t$$



به دست می‌آید.

(II) اگر f بر فاصله I تعریف شده و x_1 و x_2 دو نقطه دلخواه از این فاصله باشند آنگاه

f بر I اکیداً صعودی است. هرگاه $x_1 < x_2$ آنگاه $f(x_1) < f(x_2)$

f بر I اکیداً نزولی است. هرگاه $x_1 < x_2$ آنگاه $f(x_1) > f(x_2)$

حال با توجه به مشتق قضیه زیر را در مورد صعودی یا نزولی بودن یک تابع داریم

اگر f بر $[a, b]$ پیوسته و بر (a, b) مشتق‌پذیر باشد، آنگاه:

اگر در هر نقطه از (a, b) داشته باشیم $f' > 0$ آنگاه f بر $[a, b]$ اکیداً صعودی است.

اگر در هر نقطه از (a, b) داشته باشیم $f' < 0$ آنگاه f بر $[a, b]$ اکیداً نزولی است.

تعقر منحنی:

نمودار تابع مشتق‌پذیر $y = f(x)$ دارای تعقر به سمت بالا است هرگاه y' در آن فاصله اکیداً صعودی باشد

و دارای تعقر به سمت پایین است هرگاه y' در آن فاصله اکیداً نزولی باشد.

رسم نمودار:

برای رسم نمودار تابع باید مطابق روش زیر عمل کرد.

الف) دامنه تابع را مشخص کرد.

ب) انواع تقارن‌ها، فرد یا زوج بودن و متناوب بودن آن را بررسی کنیم.

ج) مجانب‌ها و نقاط ناپیوستگی را به دست آوریم.

د) مشتق اول را محاسبه کرده، نقاط بحرانی و فاصله‌هایی که در آن تابع صعودی یا نزولی است مشخص کنیم.

ذ) مشتق دوم را محاسبه می‌کنیم و به کمک آن تعقر و نقاط عطف را تعیین می‌کنیم.

ر) شکل کلی نمودار را رسم می‌کنیم.

ز) f را برای مقادیر خاصی مثلاً نقاط انتهایی، نقاط بحرانی، محل برخورد با محورهای محاسبه می‌کنیم.



$$\text{حاصلضرب} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$T = T_0 + b \cdot e^{-kt} \Rightarrow \frac{dT}{dt} = -kb \cdot e^{-kt} \quad \text{۲۵- گزینه ۱}$$

۲۶- در $t = 0$ غلظت برابر c_0 است پس گزینه ۲ و ۴ غلط است.

$$c(0) = -kc_0 \quad \text{گزینه 4} \quad c(0) = -c \quad \text{گزینه 2} \Rightarrow$$

از طرفی در لحظات $t > 0$ برای گزینه ۳ مقدار c می تواند منفی شود که چنین چیزی ممکن نیست. پس گزینه ۱ صحیح است.

۲۷-

$$\text{فاصله} = r = \sqrt{(x+2)^2 + y^2} \Rightarrow \begin{cases} r^2 = (x-2)^2 + y^2 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$$

$$(x-2)^2 + y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = (x-2)^2 \quad \text{جایگذاری در} \quad \frac{x^2}{x^2 - y^2} = 1 > x^2 + (x-2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \pm(x-2) \Rightarrow \begin{cases} x = x-2 \neq & \text{فاقد جواب} \\ x = -x+2 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = 1, y = 0 \end{cases}$$

۲۸-

$$V = 3t^2 - 15t + 18 = 0 \Rightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \Rightarrow (t-2)(t-3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = 2 \end{cases}$$

۲.

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = 2 \end{cases} \quad \begin{array}{c|cc} t & 2 & 3 \\ \hline V(t) & + & - & + \end{array}$$

گزینه ۳

$$\frac{dc}{dt} = J_R \Rightarrow C = J_R t + K \Rightarrow C = 3t + K \xrightarrow{K=0} C = 3t \quad \text{۲۹-}$$



$$I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left| \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right| dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) dx = 2 \quad \text{حل:}$$

روش جزء به جزء:

فرمول انتگرال جزء به جزء از قاعده حاصلضرب مشتق بدست می‌آید:

$$d(uv) = u dv + v du \Rightarrow u dv = d(uv) - v du \xrightarrow{\text{از انتگرال گیری}} \int u dv = uv - \int v du$$

روش انتخاب کلی تابع u و dv بدین گونه است که تابعی که پس از چند بار مشتق گیری صفر می‌شود به عنوان u و تابع دیگر را به عنوان dv انتخاب می‌کنیم.

مثال ۱۸: انتگرال $I = \int \sin^{-1} x dx$ برابر است با:

$$\sin^{-1} x - \left(1-x^2\right)^{-1/2} \quad (2) \quad \sin^{-1} x - \left(1-x^2\right)^{1/2} \quad (1)$$

$$x \sin^{-1} x - \left(1-x^2\right)^{1/2} \quad (4) \quad x \sin^{-1} (x) + \left(1-x^2\right)^{1/2} \quad (3)$$

$$\begin{cases} dx=du \Rightarrow x=u \\ u=\sin^{-1} x \Rightarrow du=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} I &= uv - \int v du = x \sin^{-1} x - \int \frac{x}{1-x^2} \\ &= x \sin^{-1} x + \left(1-x^2\right)^{1/2} + C \end{aligned} \quad \text{حل:}$$

مثال ۱۹: حاصل $\int_1^2 (x^2 + 2x - 1)e^{x^2} dx$ کدام است؟

$$\frac{1}{27}(7e^7 + 17) \quad (1) \quad 2e^7 - 3 \quad (2) \quad \frac{1}{2}(e^7 + 2) \quad (3) \quad (4)$$

$$\begin{array}{lcl} \text{مشتق} \downarrow & u = x^2 + 2x - 1 & e^{x^2} \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \text{انتگرال گیری} \\ 2x + 2 & \xrightarrow{+} & \frac{1}{3}e^{x^2} \\ 2 & \xrightarrow{-} & \frac{1}{9}e^{x^2} \\ 0 & \xrightarrow{+} & \frac{1}{18}e^{x^2} \\ 0 & \xrightarrow{-} & \frac{1}{18}e^{x^2} \end{array}$$

حل:



$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m \ln \left(1 - \frac{1}{m}\right)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m \left(-\frac{1}{m}\right)} = -1 \neq 0$$

حل:

پس سری واگراست.

سری هندسی :

سری $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots$ موسوم به سری هندسی که در آن a جمله اول و r قدر نسبت

سری است. برای $|r| < 1$ همگرا به $\frac{a}{1-r}$ و برای $|r| \geq 1$ واگراست و مجموع جزئی n جمله اول

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

است.

سری p

سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \dots$ که در آن p عددی ثابت است سری p نامیده می شود. این سری برای

$p > 1$ همگرا و برای $p \leq 1$ واگراست، این سری برای $p=1$ به سری هارمونیک یا هم ساز موسوم است

که واگراست.

سری تلسکوپی :

سری $\sum_{n=k}^{\infty} (u_n - u_{n+1})$ سری تلسکوپی نامیده می شود. اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ سری همگرا به

مقدار u_k است در غیر این صورت سری واگراست.

مثال ۴ حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ چیست

حل:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

سری تلسکوپی $\rightarrow \frac{1}{n+1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{n} \Big|_{n=1}^{\infty} = 1$$

مثال ۵: سری های $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}}{1+n^2}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}}{1+n^3}$ به ترتیب چگونه اند؟

(۱) همگرا، واگرا (۲) همگرا، همگرا (۳) واگرا، همگرا (۴) واگرا، واگرا

حل :

$$\left\{ \frac{n\sqrt{n}}{1+n^3} \right\} \sim \left\{ \frac{n^{\frac{3}{2}}}{n^3} \right\} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \rightarrow p > 1 \text{ سری که همگراست}$$

$$\left\{ \frac{n\sqrt{n}}{1+n^2} \right\} \sim \left\{ \frac{n^{\frac{3}{2}}}{n^2} \right\} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \rightarrow p < 1 \text{ سری که واگراست}$$



ماتریس همسازهای A برابر است با

$$A_{jk} = \begin{bmatrix} 7 & -14 & -7 \\ 6 & -2 & -11 \\ 2 & 11 & 8 \end{bmatrix}$$

دترمینان ماتریس برابر است با $\det(A)=35$

$$A^{-1} = \frac{(A_{jk})^T}{\det(A)} = \frac{1}{35} \begin{bmatrix} 7 & 6 & 2 \\ -14 & -2 & 11 \\ -7 & -11 & 8 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه:

اگر $A = (a_{jk})$ یک ماتریس $n \times n$ باشد، اگر برداری غیرصفر چون X یافت شود که داشته باشیم $AX = \lambda X$

و در آن λ یک عدد مختلط است. در این صورت بردار X را یک بردار ویژه و عدد λ را یک مقدار ویژه ماتریس می‌نامیم، برای تعیین مقادیر ویژه ماتریس A ، معادله درجه n زیر را که معادله مشخصه ماتریس نامیده می‌شود حل می‌کنیم $\det(A - \lambda I) = 0$

مثال ۲۱: $\lambda = 1$ اگر یک مقدار ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ باشد بردار ویژه متناظر با آن را به

دست آورید

$$(A - \lambda I) \times = 0 \xrightarrow{\lambda=1} (A - I) \times = 0 \Rightarrow \begin{cases} (2-1)X_1 - 2X_3 = 0 \\ (4-1)X_2 = 0 \\ -2X_1 + (5-\lambda)X_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_1 - 2X_3 = 0 \\ 3X_2 = 0 \\ -2X_1 + 4X_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = 2 \times 3 \\ X_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (X_1, X_2, X_3) = (2X_3, 0, X_3)$$

مثال ۲۲: مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ چیست؟

$$\begin{bmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (5-\lambda)(2-\lambda) - (4) = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 1, \lambda = 6$$

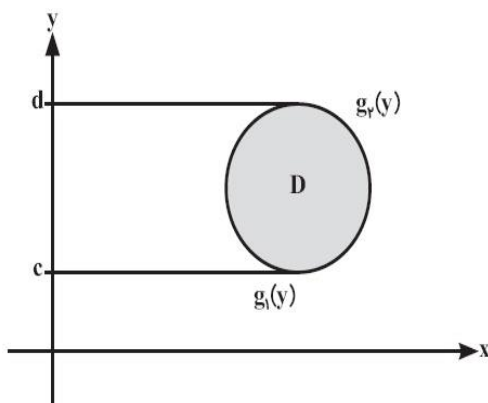
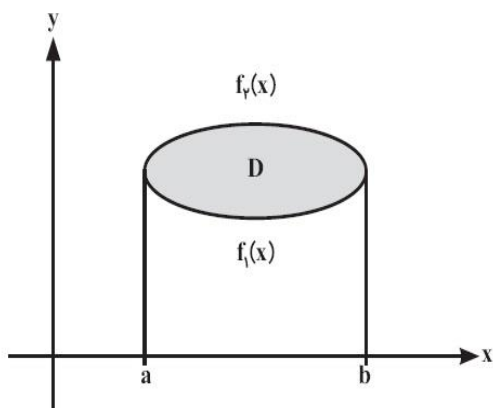


انتگرال‌های دوگانه

اگر D به شکلی باشد که هر خط موازی با محور y ها، مرز آن را حداکثر در دو نقطه قطع کند (شکل ۱) و

$y = f_1(x)$ و $y = f_2(x)$ به ترتیب مرزهای پائین و بالای ناحیه D باشند و برای همه $a \leq x \leq b$ ، $f_1(x)$ و $f_2(x)$ یک مقداری و پیوسته باشند، در این حالت انتگرال دوگانه را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_{x=a}^b \int_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy dx = \int_a^b \left\{ \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy \right\} dx$$



خواص انتگرال‌های دوگانه

$$1) \iint_D A f dA = A \iint_D f dA$$

$$2) \iint_D (f \pm g) dA = \iint_D f dA \pm \iint_D g dA$$

$$\iint_D f dA \geq 0 \quad \text{اگر در } D, f \geq 0 \text{ آنگاه}$$

$$\iint_D f dA \geq \iint_D g dA \quad \text{اگر در } D, f \geq g \text{ آنگاه}$$

$$3) \text{ اگر } D_1 \cup D_2 = D \text{ و } D_1, D_2 \text{ تداخل نداشته باشند آنگاه}$$